第 27 講　確率分布

§1 確率変数と確率分布

要点整理 と 公式

要点 ① 確率変数と確率分布

「　　　　　」… 試行の結果によってその値が定まり，その値をとる確率が定まる変数

確率変数 X について

$X=a$ となる確率を

$a \leqq X \leqq b$ となる確率を

のように表す。

確率変数 X の値とその値をとる確率の対応関係を「　　　　　」(分布)といい，確率変数 X は確率分布に　　　という。

一般に，確率変数 X のとりうる値 x_1，x_2，……，x_n に対して確率 p_1，p_2，……，p_n が対応するとき，X の確率分布を次のように表す。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

また，このとき

$p_1 \geqq 0$，$p_2 \geqq 0$，……，$p_n \geqq 0$

$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=$

が成り立つ。

例 2 枚の硬貨を同時に投げる試行において，表の出る枚数を X とするとき，X の確率分布は下の表のようになる。

X				計
P				

また $X=0$，$X \geqq 1$ となる確率は　$P(X=0)=$　，

$P(X \geqq 1)=$　　　　＋　　　　$=\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ である。

[MEMO]

1 赤球 4 個，白球 3 個の入った袋から，2 個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。

(2) $P(X \leqq 1)$ を求めよ。

Point Pickup

確率分布

確率変数 X のとりうる値 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ と，それぞれの値をとる確率 $p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n$ の対応関係を，X の確率分布という。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$p_1 \geqq 0,\ p_2 \geqq 0,\ \cdots\cdots,\ p_n \geqq 0$

$p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n = 1$

[MEMO]

§2 確率変数の期待値

要点整理 と 公式

要点 ① 確率変数の期待値

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられたとき

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

を，X の「　　　　」または「　　　」といい，

　　(または m)で表す。

確率変数の期待値(平均)

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

例 右の表のような賞金がついている 1000 本のくじがある。くじを 1 本引いたときの賞金を X 円とすると，X の確率分布は下の表のようになる。

	賞金	本数
1 等	10000 円	1 本
2 等	2000 円	3 本
はずれ	0 円	996 本
合計		1000 本

X	10000	2000	0	計
P	$\frac{1}{1000}$	$\frac{3}{1000}$	$\frac{996}{1000}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=10000\cdot\frac{1}{1000}+2000\cdot\frac{3}{1000}+0\cdot\frac{996}{1000}=16\text{(円)}$$

[MEMO]

2 3 枚の硬貨を同時に投げて，表が出る枚数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

Point Pickup

確率変数の期待値

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

期待値　$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

[MEMO]

§3 確率変数の分散と標準偏差

要点整理 と 公式

要点① 確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X の散らばりの度合いを表す値として

確率変数と　　　　　　　　　　の期待値(平均)

を考える。

X の確率分布が右の表で与えられ，その期待値が　で

あるとする。X の各値と m との差の 2 乗

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$(x_1-m)^2$，$(x_2-m)^2$，……，$(x_n-m)^2$

について，これらの値をとる

確率変数 $(X-m)^2$ の期待値は

$(X-m)^2$	$(x_1-m)^2$	$(x_2-m)^2$	…	$(x_n-m)^2$	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$$E\big((X-m)^2\big)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

である。これを X の「　　　」といい，　　　で表す。

確率変数の分散

$$V(X)=E\big((X-m)^2\big)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

分散は，確率変数 X の単位が 2 乗されているから，X の単位と一致させるために，分散の正の平方根　　　　を考える。これを X の「　　　　　」といい，　　　で表す。

確率変数の標準偏差

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

確率変数 X の分散や標準偏差は，X の期待値からの散らばりの度合いを表す。分散や標準偏差の値が小さいほど，X の値が期待値の付近に集中し，大きいほど期待値からの散らばりが大きいことを示す。

例 2 枚の硬貨を同時に投げる試行において，表の出る枚数を X とするとき，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の期待値は

$$=\qquad+\qquad+\qquad=1$$

X の分散は

$$=\qquad\qquad+\qquad\qquad+\qquad\qquad=\frac{1}{2}$$

X の標準偏差は

$$=\sqrt{V(X)}=\qquad=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

要点② 分散の公式

確率変数 X の分散を表す式を変形すると

$$\begin{aligned}V(X)&=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n\\&=\left(x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2+\cdots\cdots+x_n{}^2p_n\right)\\&\qquad-2m(x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n)\\&\qquad\qquad+m^2(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)\\&=E\left(X^2\right)-2m\cdot m+m^2\cdot 1\\&=E\left(X^2\right)-m^2\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

分散の公式

$$V(X)=E\left(X^2\right)-m^2=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$

例　X の確率分布が右の表のようであるとき

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

X の期待値は $E(X)=1$

よって，X の分散は

$$V(X)=\qquad-$$

$$=\quad\cdot\frac{1}{4}+\quad\cdot\frac{2}{4}+\quad\cdot\frac{1}{4}\qquad=\frac{1}{2}$$

3 当たりくじ 2 本を含む 10 本のくじがある。このくじを同時に 5 本引いたときの当たりくじの本数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

Point Pickup

確率変数の分散と標準偏差

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき，

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

X の期待値を $E(X)=m$ とすると

分散　$V(X)=E\left((X-m)^2\right)$

$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$

$=E\left(X^2\right)-m^2=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$　……$(X^2$ の期待値$)-(X$の期待値$)^2$

標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$　……$(\sqrt{\text{分散}})$

[MEMO]

§4 確率変数の変換

要点整理 と 公式

要点 ① 確率変数の変換と $aX+b$ の期待値

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，a，b を定数として，X の 1 次式

$$Y=aX+b$$

で Y を定めると，Y は

$$y_k=ax_k+b$$

で定まる値をとる確率変数であり，Y の確率分布は右の表のようになる。このとき，Y の期待値 $E(Y)$ は

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(aX+b)\\&=(ax_1+b)\cdot p_1+(ax_2+b)\cdot p_2+\cdots\cdots+(ax_n+b)\cdot p_n\\&=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)\\&=a\qquad+b\cdot\\&=aE(X)+b\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

$aX+b$ の期待値

確率変数 X と定数 a，b について

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

例　確率変数 X の期待値が 3 であるとき，$Y=2X-1$ で表される確率変数 Y の期待値は

$$E(Y)=E(2X-1)=\quad E(X)\quad=2\cdot3-1=5$$

要点 ② $aX+b$ の分散，標準偏差

確率変数 X，および a，b を定数として X の 1 次式 $Y=aX+b$ で定められる確率変数 Y の確率分布が右の表で与えられているとき，Y の分散と標準偏差を考える。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

$E(X)=m$ とすると

$$E(Y)=aE(X)+b=am+b$$

Y の分散 $V(Y)$ は

$$V(Y)=\{y_1-E(Y)\}^2p_1+\{y_2-E(Y)\}^2p_2+\cdots\cdots+\{y_n-E(Y)\}^2p_n$$

$$=\{(ax_1+b)-(am+b)\}^2p_1+\{(ax_2+b)-(am+b)\}^2p_2$$

$$+\cdots\cdots+\{(ax_n+b)-(am+b)\}^2p_n$$

$$=\{a(x_1-m)\}^2p_1+\{a(x_2-m)\}^2p_2+\cdots\cdots+\{a(x_n-m)\}^2p_n$$

$$=\quad\{(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n\}$$

$$=\quad V(X)$$

Y の標準偏差 $\sigma(Y)$ は

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{a^2V(X)}=\quad\sigma(X)$$

よって，次のことが成り立つ。

$aX+b$ の分散，標準偏差

確率変数 X と定数 a，b について

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

$$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

例　確率変数 X の分散が 2 であるとき，$Y=3X+5$ で表される確率変数 Y の分散と標準偏差は

$$V(Y)=V(3X+5)=\quad V(X)=3^2\cdot2=18$$

$$\sigma(Y)=\sigma(3X+5)=\quad\sigma(X)=3\sqrt{2}$$

※ $\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

4 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，確率変数 $6X-5$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

Point Pickup

$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X と定数 a，b について

期待値　$E(aX+b)=aE(X)+b$

分散　$V(aX+b)=a^2V(X)$

標準偏差 $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

[MEMO]

第 27 講　確認テスト

1 赤球 3 個，白球 5 個の入った袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。

(1) X の確率分布を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{\boxed{アイ}}{56}$	$\frac{\boxed{ウエ}}{56}$	$\frac{\boxed{オカ}}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

(2) $P(X \geqq 2)$ を求めよ。

$$P(X \geqq 2) = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

2 さいころを 2 回投げて，5 以上の目が出る回数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

3 黒石 4 個，白石 2 個の入った袋から，3 個の石を同時に取り出すとき，出る黒石の個数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求め，答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$$E(X) = \boxed{サ},\quad V(X) = \boxed{シ},\quad \sigma(X) = \boxed{ス}$$

① 2　② 3　③ 4　④ $\sqrt{2}$

⑤ $\frac{2}{5}$　⑥ $\frac{4}{5}$　⑦ $\frac{\sqrt{10}}{5}$　⑧ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

4 確率変数 X の確率分布が下の表で与えられているとき，確率変数 $4X-3$ の期待値，分散，標準偏差を求め，答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(4X-3)=$ セ ，$V(4X-3)=$ ソ ，

$\sigma(4X-3)=$ タ

① 2　② 5　③ 15　④ $\sqrt{15}$

⑤ $\frac{5}{4}$　⑥ $\frac{9}{4}$　⑦ $\frac{15}{16}$　⑧ $\frac{\sqrt{15}}{4}$

第 28 講　確率変数の和と積

§1 確率変数の和の期待値

要点整理 と 公式

要点 ① 同時分布，確率変数の和の期待値

2 つの確率変数 X, Y について，$X=a$ かつ $Y=b$ である確率を

$$P(X=a,\ Y=b)$$

と表す。

X のとる値が x_1, x_2, ……, x_n, Y のとる値が y_1, y_2, ……, y_m であるとき，$X=x_i$ かつ $Y=y_j$ である確率 $P(X=x_i,\ Y=y_j)$ を p_{ij}, $P(X=x_i)=p_i$, $P(Y=y_j)=q_j$ とすると，X, Y の確率分布は右の表のようになる。この対応を X と Y の「　　　　　」という。

X＼Y	y_1	y_2	…	y_m	計
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1m}	
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2m}	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nm}	
計			…		

この表から

$$P(X=x_i)=p_{i1}+p_{i2}+\cdots\cdots+p_{im}=p_i$$

$$P(Y=y_j)=p_{1j}+p_{2j}+\cdots\cdots+p_{nj}=q_j$$

が成り立つ。

2 つの確率変数 X, Y の和を $Z=X+Y$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X, Y の同時分布が右の表で与えられているとき，$Z=X+Y$ の期待値は

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$E(Z)=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)\qquad+(\qquad)p_{21}+$$

$$=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})$$

$$=x_1\qquad+x_2\qquad+y_1\qquad+y_2$$

$$=E(X)+E(Y)$$

一般に，次のことが成り立つ。

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X，Y について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

例 1個のさいころを2回投げるとき，1回目と2回目に出る目の和の期待値を求める。

1回目，2回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

同様に $E(Y)=\frac{7}{2}$

したがって，出る目の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\quad+\quad=7$$

確率変数 X と定数 a，b について，$E(aX+b)=aE(X)+b$ が成り立つことから，確率変数 X，Y と定数 a，b について

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

が成り立つ。また，3つの確率変数 X，Y，Z についても

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

が成り立つ。

1　100円硬貨1枚と10円硬貨1枚を同時に投げる。

(1)　表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2)　表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

Point Pickup

確率変数の和の期待値

2つの確率変数 X，Y と定数 a，b について

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

[MEMO]

§2 独立な確率変数

要点整理 と 公式

要点 ① 独立な確率変数，独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X，Y において，X のとる値 x_i と Y のとる値 y_j について，どのような x_i，y_j に対しても

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

が成り立つとき，確率変数 X，Y は互いに「　　　」であるという。

例　2 つの確率変数 X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき

X＼Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$P(X=0,\ Y=1)=\quad=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0)\cdot P(Y=1)=\quad\cdot\quad=\frac{1}{4}$$

よって $P(X=0,\ Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)$

X，Y の値のすべての組に関して同様の式が成り立つ。よって，X，Y は独立である。

2 つの試行 S，T が独立であるとき，S における確率変数 X と T における確率変数 Y は独立である。

2 つの独立な確率変数 X，Y の積を $Z=XY$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X，Y の同時分布が右の表で与えられているとき，X と Y は独立であるから

X＼Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$p_{11}=\qquad$，$p_{12}=p_1q_2$，$p_{21}=p_2q_1$，$p_{22}=p_2q_2$

よって

$$\begin{aligned}E(Z)&=(x_1y_1)p_{11}+(x_1y_2)p_{12}+(x_2y_1)p_{21}+(x_2y_2)p_{22}\\&=(x_1y_1)p_1q_1+(x_1y_2)p_1q_2+(x_2y_1)p_2q_1+(x_2y_2)p_2q_2\\&=x_1p_1\cdot y_1q_1+x_1p_1\cdot y_2q_2+x_2p_2\cdot y_1q_1+x_2p_2\cdot y_2q_2\\&=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

一般に，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の積の期待値

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

例 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の積の期待値を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると , 求めるものは XY の期待値である。

$$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

X，Y は独立であるから , 出る目の積 XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\quad\cdot\quad=\frac{49}{4}$$

要点 ② 独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つ。これを用いると，和 $X+Y$ の分散について，分散の公式より

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E\left((X+Y)^2\right)-\{E(X+Y)\}^2\\&=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\{E(X)+E(Y)\}^2\\&=E\left(X^2\right)+2E(XY)+E\left(Y^2\right)-\left[\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2\right]\\&=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2+E\left(Y^2\right)-\{E(Y)\}^2=V(X)+V(Y)\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の和の分散

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

例 1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の和の分散を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の分散である。

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

同様に $V(Y)=\dfrac{35}{12}$

X，Y は独立であるから，出る目の和 $X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\quad+\quad=\frac{35}{6}$$

互いに独立な 3 つの確率変数 X，Y，Z について，次のことが成り立つ。

$$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z),\quad V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$$

2 2 つの確率変数 X, Y が互いに独立で , それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき, 次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1)　XY の期待値を求めよ。

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

Point Pickup

独立な確率変数の積の期待値と和の分散

確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

[MEMO]

第 28 講　確認テスト

1 1 から 5 までの数が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードがある。この中から 1 枚引き，数を記録してからもとに戻し，もう 1 枚引く。1 回目と 2 回目に引いたカードに書かれた数の和の期待値を求めよ。 ア

2 500 円硬貨 1 枚と 100 円硬貨 1 枚を同時に投げるとき，表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

イウエ 円

3 2 つの確率変数 X，Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	1	2	3	計
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1)　XY の期待値を求めよ。

$E(XY)=$ オ

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

$V(X+Y)=\frac{\text{カキ}}{36}$

[MEMO]

第29講　二項分布

§1 二項分布

要点整理 と 公式

要点① 二項分布

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^r\,(1-p)^{n-r}$$

であり，$1-p=q$ とおくと , この確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^r\,q^{n-r}\qquad (p+q=1)$$

と表される。

この反復試行において，事象 A の起こる回数を X とすると，X は 0，1，……，n の値をとる確率変数であり，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r\,q^{n-r}\qquad (r=0，1，……，n)$$

である。よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	……	${}_n\mathrm{C}\ \ p\ \ q$	1

この表で与えられる確率分布を「　　　　　」という。二項分布は n と p の値によって定まり，　　　で表す。またこのとき，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に「　　　」という。

※$X=0$，1，……，r，……，n のときの確率の総和は，二項定理より

$${}_n\mathrm{C}_0\,p^0\,q^n+{}_n\mathrm{C}_1\,p^1\,q^{n-1}+……+{}_n\mathrm{C}_r\,p^r\,q^{n-r}+……+{}_n\mathrm{C}_n\,p^n\,q^0=(p+q)^n=1^n=1$$

であることが確認できる。

例　1個のさいころを3回投げるとき，2以下の目が出る回数を X とする。

1回の試行で2以下の目が出る確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

この試行を3回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(3,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。

よって，$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)=\ \mathrm{C}\left(\quad\right)\left(\quad\right)\qquad (r=\qquad\qquad)$$

であり

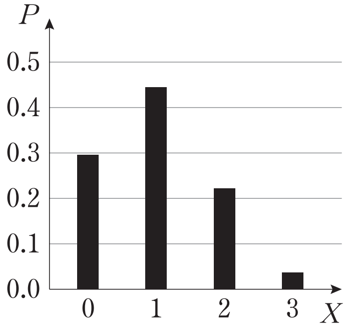
$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\ \left(\frac{2}{3}\right)\ =\frac{8}{27},\qquad P(X=1)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\ \left(\frac{2}{3}\right)\ =\frac{12}{27},$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\ \left(\frac{2}{3}\right)\ =\frac{6}{27},\qquad P(X=3)={}_3\mathrm{C}\ \left(\frac{1}{3}\right)\ \left(\frac{2}{3}\right)\ =\frac{1}{27}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

また，この確率分布をグラフで表すと右のようになる。



1 1 枚の硬貨を 4 回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1) X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2) X の確率分布を求めよ。

Point Pickup

二項分布 $B(n,\ p)$

1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，その確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	……	r	……	n	計
P	${}_n\mathrm{C}_0 p^0 q^n$	${}_n\mathrm{C}_1 p^1 q^{n-1}$	……	${}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r}$	……	${}_n\mathrm{C}_n p^n q^0$	1

この表で与えられる確率分布を「二項分布」といい，$B(n,\ p)$ で表す。

また，確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う，という。

[MEMO]

§2 二項分布の期待値，分散，標準偏差

要点整理 と 公式

要点 ① 二項分布の期待値，分散，標準偏差

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布　　　　に従う。この二項分布の期待値，分散を求める。

1 回目，2 回目，……，n 回目に

事象 A が起これば　，起こらなければ

の値をとる確率変数をそれぞれ X_1，X_2，……，X_n とすると，

$X=$

と表される。よって，X の期待値は

$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)$

ここで，確率変数 X_k ($k=1$，2，……，n)の確率分布は右の表のようになる。ただし，$p+q=1$ である。よって，

X_k	0	1	計
P	q	p	1

$E(X_k)=0\cdot q+1\cdot p=$

である。

したがって，X の期待値は

$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=\ \ +\ \ +\cdots\cdots+\ \ =$

また，確率変数 X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから，X の分散は

$V(X)=V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)$

$E\left(X_k{}^2\right)=0^2\cdot q+1^2\cdot p=$　より

$V(X_k)=E\left(X_k{}^2\right)-\{E(X_k)\}^2=\ \ -\ \ {}^2=p(1-p)=$

よって，X の分散は

$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=\ \ +\ \ +\cdots\cdots+\ \ =$

以上より，次のことが成り立つ。

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値 $E(X)=np$，　分散 $V(X)=npq$，　標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

例 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表が出る回数を X とする。X の期待値と標準偏差を求める。

X は二項分布　　　　　に従うので

期待値 $E(X)=\qquad=5$

分散 $V(X)=\qquad=\dfrac{5}{2}$

標準偏差 $\sigma(X)=\qquad=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

2 1個のさいころを300回投げるとき，6の目が出る回数を X とする。

(1) X の期待値を求めよ。

(2) X の分散を求めよ。

(3) X の標準偏差を求めよ。

Point Pickup

二項分布の期待値，分散，標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値　$E(X)=np$

分散　$V(X)=npq$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[MEMO]

第 29 講　確認テスト

1　1 から 4 までの数が 1 つずつ書かれた 4 個の球が袋の中に入っている。この中から 1 個取り出す試行を 3 回行う。ただし，取り出した球はもとに戻すものとする。1 が書かれた球を取り出した回数を X とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。答えは，下の①～④のうちから選べ。［ア］

①　$B\left(3,\ \frac{3}{4}\right)$　　②　$B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$

③　$B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$　　④　$B\left(\frac{1}{4},\ 3\right)$

(2)　X の確率分布を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{［イウ］}{64}$	$\frac{［エオ］}{64}$	$\frac{［カ］}{64}$	$\frac{［キ］}{64}$	1

2　1 個のさいころを 400 回投げるとき，偶数の目が出る回数を X とする。次の問いに答えよ。

(1)　X の期待値を求めよ。答えは，下の①～④のうちから選べ。

$E(X) =$［ク］

①　50　　②　100

③　200　　④　400

(2)　X の分散と標準偏差を求めよ。答えは，下の①～⑨のうちから選べ。

$V(X) =$［ケ］，$\sigma(X) =$［コ］

①　5　　②　10　　③　20

④　25　　⑤　50　　⑥　100

⑦　200　　⑧　400　　⑨　1600

[MEMO]

第 30 講　正規分布

§1 連続分布

要点整理 と 公式

要点 ① 連続型確率変数と連続分布

あるものの個数やあることがらが起こった回数のように，とびとびの値をとる確率変数を「離散型確率変数」という。これに対して，重さ，長さ，時間のように連続的な値をとる確率変数を「　　　　　　　　」という。

長さ (cm)	相対度数
9.1 以上 9.3 未満	0.02
9.3 〜 9.5	0.03
9.5 〜 9.7	0.09
9.7 〜 9.9	0.18
9.9 〜 10.1	0.30
10.1 〜 10.3	0.20
10.3 〜 10.5	0.14
10.5 〜 10.7	0.03
10.7 〜 10.9	0.01
計	1.00

右の表は，紙テープを目分量で 10 cm の長さになるように切り，切り取られたテープの実際の長さを測定することを 100 回繰り返した結果を，相対度数で表したものである。

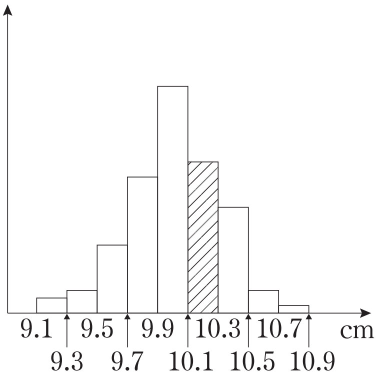
実際の長さを X cm とすると，表より

$$10.3 \leqq X < 10.5$$

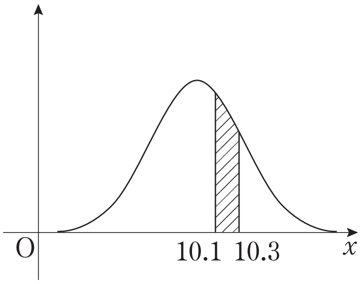
で表される階級の相対度数が　　　であることから，X が

$$10.3 \leqq X < 10.5$$

の階級に属する　　　が 0.14 であると考えることができる。このように，各階級の相対度数を，X が各階級に属する確率と考えると，X は各階級に属する確率が定まる確率変数と考えられ，その確率分布は，右のような相対度数の分布の表になる。



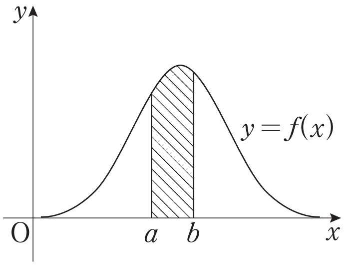
右のグラフは，上の測定で得られたデータを用いて，各階級に対応する柱状部(長方形)の　　　が，その階級の相対度数と等しくなるように縦軸の目盛りをとったヒストグラムである。例えば，X が 10.1 cm 以上 10.3 cm 未満の値をとる確率は，右の図の斜線部分の面積に等しく，　　　である。また，これらの長方形の面積の和は　である。



測定する個数を増やし，さらに階級の幅を小さくすると，ヒストグラムの形は 1 つの曲線に近づいていく。右の図において，曲線と 2 直線 $x = 10.1$，$x = 10.3$ および x 軸で囲まれた部分の面積は 0.20 となり，この面積が X が 10.1 cm

以上 10.3 cm 未満の値をとる確率を表す。

一般に，連続型確率変数 X に 1 つの関数 $y=f(x)$ が対応し，$a \leqq X \leqq b$ となる確率が右の図の斜線部分の面積に等しいとき，関数 $f(x)$ を X の「　　　　　　　」といい，$y=f(x)$ のグラフを X の「　　　　　」という。



確率密度関数 $f(x)$ の性質は以下

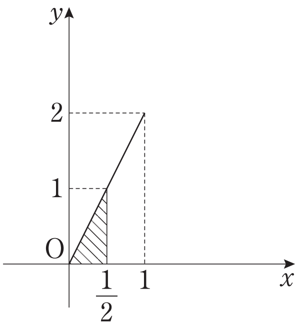
[1] 常に $f(x) \geqq 0$

[2] $P(a \leqq X \leqq b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

[3] Xのとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$

例　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=2x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられているとき

$$P\left(0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right)= \qquad\qquad =\frac{1}{4}$$



1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{1}{2}x\,(0 \leqq x \leqq 2)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.3 \leqq X \leqq 0.7)$　　(2)　$P(0 \leqq X \leqq 2)$

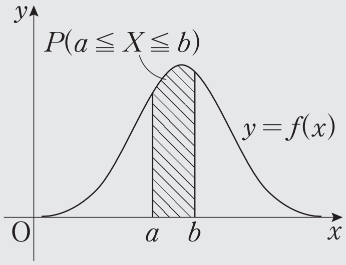
Point Pickup

確率密度関数と確率

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$=\left(\begin{array}{l}\text{曲線 } y=f(x) \text{ と } x \text{ 軸および 2 直線} \\ x=a,\ x=b \text{ で囲まれた部分の面積}\end{array}\right)$$



X のとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$ である。

[MEMO]

§2 正規分布

要点整理 と 公式

要点 ① 正規分布

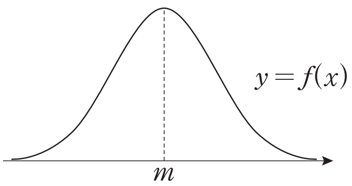
連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，m を実数，σ を正の実数として

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

で表されるとき，X は「　　　　　　　　　　　　　　」という。π は円周率，e は自然対数の底とよばれる無理数で，$e=2.71828\cdots\cdots$ である。X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従う確率変数であるとき

X の期待値 $E(X)=m$，X の標準偏差 $\sigma(X)=\sigma$

であることが知られている。



$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，次のような性質をもつ。

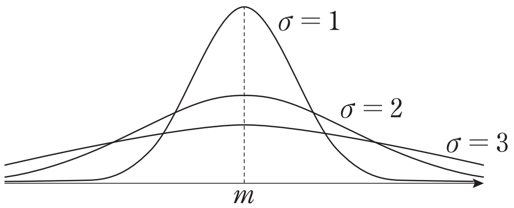
[1] 直線 $x=m$ に関して対称であり，y は $x=m$ のとき最大値をとる。

[2] x 軸を漸近線(曲線が限りなく近づく直線)とする。

[3] 標準偏差 σ について

・σ が大きくなると，曲線の山が低くなり，横に広がる。

・σ が小さくなると，曲線の山が高くなり，$x=m$ の周りに集まる。



工場で一定の規格に基づいて作られた部品の重さの誤差など，社会現象や自然現象のデータの分布を，正規分布に従うとみなして考えることがある。

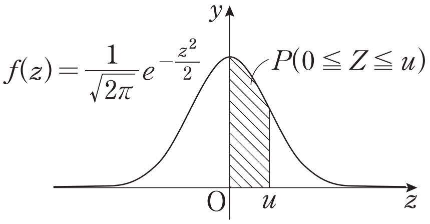
要点 ② 標準正規分布

期待値 $m=0$，標準偏差 $\sigma=1$ の正規分布　　　　　を「　　　　　　　」という。確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，確率密度関数は

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であり，その分布曲線は右図のようになる。

右図の斜線部分の面積は確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ を表し，u の値に対する確率 $P(0\leqq Z\leqq u)$ の値をまとめたものが「正規分布表」である。



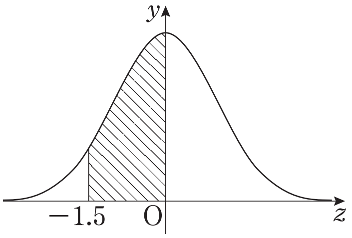
以下は正規分布表の一部である。

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

例　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき

$P(0\leqq Z\leqq 0.55)=$

$P(-1.5\leqq Z\leqq 0)=P(\quad\leqq Z\leqq\quad)=$



2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　　(2)　$P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜正規分布表＞

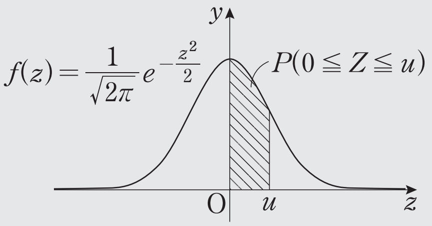
u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

標準正規分布と確率

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，右図の斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。

分布曲線が $z=0$ （y 軸）に関して対称であることに注目。



[MEMO]

§3 確率変数の標準化

要点整理 と 公式

要点 ① 確率変数の標準化

確率変数 X が $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

$$Z=\frac{X\qquad}{\qquad}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ \ ,\ \ )$ に従うことが知られている。このように，確率変数 X を，標準正規分布に従う確率変数 Z に直すことを「　　　　」といい，この Z を，X を標準化した確率変数という。

例 確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，確率 $P(-2\leqq X\leqq 2)$ を求める。

$Z=\dfrac{X\qquad}{\qquad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=-2$ のとき　$Z=\dfrac{-2-1}{2}=-\dfrac{3}{2}=-1.5$

$X=2$ のとき　$Z=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}=0.5$

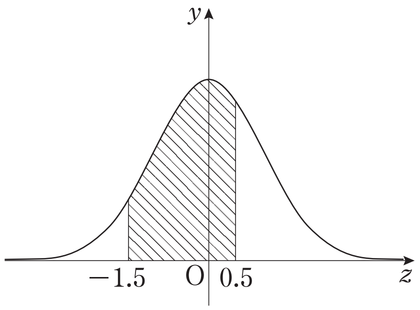
よって　$P(-2\leqq X\leqq 2)$

$=P(-1.5\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(-1.5\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(0\leqq Z\leqq 1.5)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=0.4332+0.1915=0.6247$



要点 ② 正規分布の利用

日常の身近な問題を，正規分布を利用して考える。

例 ある高校の 2 年生男子の身長が，平均 170 cm，標準偏差 6 cm の正規分布に従うものとする。この 2 年生男子の中で，身長 167 cm 以上 173 cm 以下の生徒は約何 % いるかを求める。

身長を Xcm とすると，X は正規分布 $N(\qquad,\qquad)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-\qquad}{\qquad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ \ ,\ \ )$ に従う。

$X=167$ のとき　$Z=-0.5$　　　　$X=173$ のとき　$Z=0.5$

よって　$P(167 \leqq X \leqq 173)$

$= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0.5)$

$= P(-0.5 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$= \quad P(0 \leqq Z \leqq 0.5) = 2 \cdot 0.1915 = 0.383$

したがって，約　　%いる。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3　ある高校の 2 年生女子の身長が，平均 157.9 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 年生女子の中で，身長 155 cm 以上 163 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2)　この 2 年生女子の中で，身長が平均を 10 cm 以上上回る生徒は約何 % いるか。

＜ 正規分布表 ＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

確率変数の標準化

確率変数 X が $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。このことを利用して，確率変数 X に関する確率を，確率変数 Z に関する確率として求めることができる。

[MEMO]

§4 二項分布の正規分布による近似

要点整理 と 公式

要点① 二項分布の正規分布による近似

1 回の試行で事象 A が起こる確率が p である試行を n 回繰り返す反復試行において，事象 A が起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。このとき

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^r q^{n-r}\quad (q=1-p,\ r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

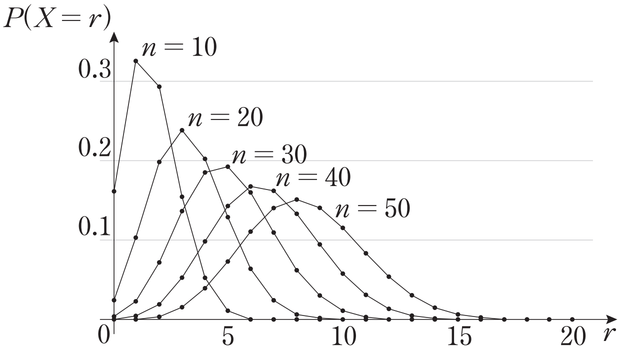
期待値 $E(X)=np$，　分散 $V(X)=npq$，　標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

である。

1 個のさいころを n 回投げる試行で 1 の目が出る回数を X とすると，確率変数 X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。この X について，$P(X=r)$ を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

のそれぞれについて計算し，折れ線グラフで表すと右図のようになり，n の値が大きくなるにつれてグラフの形は左右対称の山型に近づいていく。

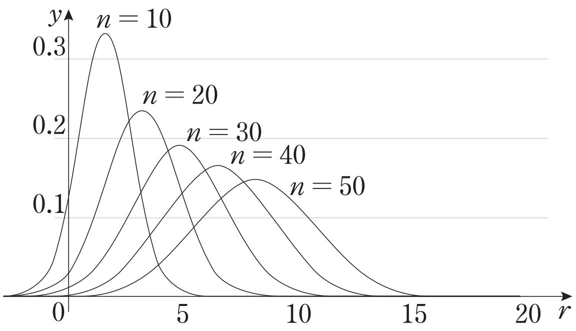


二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ の期待値は $n\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{n}{6}$，分散は $n\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5n}{36}$ である。

ここで，この二項分布と期待値，分散が等しい正規分布 $N\left(\dfrac{n}{6},\ \dfrac{5n}{36}\right)$ の分布曲線を

$n=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$

について描くと，右図のようになり，二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{1}{6}\right)$ のグラフは，n が大きくなるにつれて正規分布 $N\left(\dfrac{n}{6},\ \dfrac{5n}{36}\right)$ のグラフに近づくことがわかる。



一般に，次のことが成り立つ。

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$ とする。

例 1 個のさいころを 720 回投げるとき，6 の目が出る回数が 110 回以下である確率を求める。

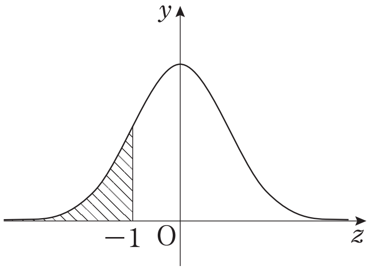
6 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布　　　　　　に従うから

$E(X)=$　　　　$=120$，　$V(X)=$　　　　　$=100$，　$\sigma(X)=$　　　$=10$

$n=720$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X\qquad}{\qquad}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　に従うので，求める確率は

$$
\begin{aligned}
P(X\leqq 110)&=P(Z\leqq -1)\\
&=P(Z\leqq 0)-P(-1\leqq Z\leqq 0)\\
&=0.5-0.3413\\
&=0.1587
\end{aligned}
$$



< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4　1 枚の硬貨を 1600 回投げるとき，表の出る回数が 789 回以上である確率を求めよ。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき

$$\text{正規分布 } N(np,\ npq) \qquad (q=1-p)$$

に従うとみなしてよい。

正規分布で近似し，さらに確率変数の標準化を行うことで，正規分布表を用いて確率を求めることができる。

[MEMO]

第 30 講　確認テスト

1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\dfrac{1}{18}x\ (0\leqq x\leqq 6)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(1\leqq X\leqq 5)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

(2)　$P(0\leqq X\leqq 6)=\boxed{ウ}$

2　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1)　$P(-1.55\leqq Z\leqq 0)=0.\boxed{エオカキ}$

(2)　$P(0.59\leqq Z\leqq 1.02)=0.\boxed{クケコサ}$

3 ある高校の生徒の通学時間が，平均 26 分，標準偏差 4 分の正規分布に従うものとする。以下の<正規分布表>を用いて，次の問いに答えよ。

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1)　通学時間が 24 分以上 30 分以下の生徒は約 [シス] %いる。

(2)　通学時間が 20 分以下の生徒は約 [セ] %いる。

4 1 個のさいころを 500 回投げるとき，1 の目が出る回数が 100 回以下である確率は 0.[ソタチツ] である。

<正規分布表>

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

第 31 講　統計的な推測

§1　母集団と標本

要点整理 と 公式

要点 ①　母集団と標本

「全数調査」… 調査対象となる集団の全部について調べる調査

「標本調査」… 調査対象となる集団全体からその一部を抜き出して調べる調査

標本調査において

「 母集団 」… 調査対象となる集団全体

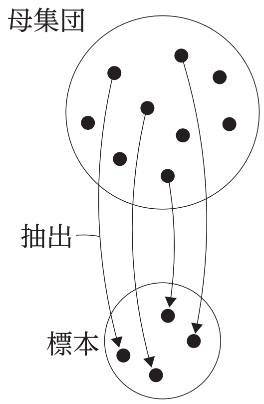
「 個体 」… 母集団に属する個々のもの

「 母集団の大きさ 」… 母集団に属する個体の総数

「 標本 」… 調査の母集団から選び出された一部分

「 抽出 」… 母集団から標本を選び出すこと

「 標本の大きさ 」… 標本に属する個体の総数



　標本調査の目的は, 抽出された標本の性質から, 母集団の性質を推測することである。よって, 標本に属する個体をかたよりなく母集団から抽出することが必要である。

「 無作為抽出 」… 母集団のどの個体も同じ確率で抽出する方法。
乱数さいや乱数表，コンピュータなどを利用して行う。

「 無作為標本 」… 無作為抽出によって抽出された標本

　母集団から標本を抽出するとき，1 個の個体を抽出するたびにもとに戻してから，次の個体を抽出することを「復元抽出」といい，もとに戻さずに続けて抽出することを「非復元抽出」という。

要点 ② 母集団の分布

大きさ N の母集団において，変量 x の値が x_1，x_2，……，x_n である個体がそれぞれ f_1，f_2，……，f_n 個あるとする。

この母集団から，1 個の個体を無作為に抽出し，その変量 x の値を X とする。

各個体が抽出される確率はすべて等しいから，X の確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	$\dfrac{f_1}{N}$	$\dfrac{f_2}{N}$	$\cdots$	$\dfrac{f_n}{N}$	1

この確率変数 X の確率分布を「　　　　　　」という。

また，X の期待値を「　　　　」，分散を「　　　　」，

標準偏差を「　　　　　　」といい，それぞれ m，σ^2，σ で表す。

例　2 と書かれたカードが 30 枚，4 と書かれたカードが 20 枚，6 と書かれたカードが 10 枚ある。この 60 枚のカードを母集団とし，カードの数字を変量とするとき，母集団分布，母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求める。

母集団から 1 枚のカードを抽出し，そのカードに書かれた数字を X とすると，母集団分布は右の表のようになる。よって

X	2	4	6	計
P	$\dfrac{3}{6}$	$\dfrac{2}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	1

$$m=2\cdot\frac{3}{6}+4\cdot\frac{2}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\sigma^2=\left(2^2\cdot\frac{3}{6}+4^2\cdot\frac{2}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

1 1, 2, 3, 4 と書かれた球がそれぞれ 1 個, 2 個, 3 個, 4 個ある。この 10 個の球を母集団とし, 球の数字を変量とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　母集団分布を求めよ。

(2)　母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

Point Pickup

母集団の分布

母集団から 1 個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき, X の確率分布を「母集団分布」という。

母平均　$m=E(X)$

母分散　$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

母標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}$

[MEMO]

§2 標本平均の分布

要点整理 と 公式

要点 ① 標本平均の期待値，分散，標準偏差

ある母集団から大きさ n の標本を無作為抽出する。この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。このとき，これらの平均

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

X	X_1	X_2	…	X_n	$\overline{X}$
標本 1			…		
標本 2					
⋮					

を「　　　　　」という。X_1，X_2，……，X_n はそれぞれ，標本の抽出によって値が定まる確率変数であるから，標本平均 $\overline{X}$ もまた，標本の抽出によって値が定まる確率変数である。

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出し，この標本の各個体の変量の値を X_1，X_2，……，X_n とする。

この抽出が「　　　　　」の場合，X_1，X_2，……，X_n のそれぞれは，母集団から大きさ 1 の標本を抽出することで得られる確率変数とみなすことができ，それぞれ母集団と同じ確率分布をもつ。よって

$$E(X_1)=E(X_2)=\cdots\cdots=E(X_n)=m,\qquad V(X_1)=V(X_2)=\cdots\cdots=V(X_n)=\sigma^2$$

が成り立つ。このとき

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n)=$$

X_1，X_2，……，X_n は互いに独立であるから

$$V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_n)=$$

したがって，標本平均 $\overline{X}$ の

期待値　$E(\overline{X})=E\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n}\cdot nm=m$

分散　$V(\overline{X})=V\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}\right)=\qquad V(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\dfrac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$

標準偏差　$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本の抽出が非復元抽出の場合は，X_1，X_2，……，X_n は互いに独立ではない。しかし，母集団の大きさ N が標本の大きさ n に比べて十分大きい場合は，復元抽出と非復元抽出の違いは小さい。よって，非復元抽出による標本を，復元抽出による標本とみなすことができる。

以上より，次のことが成り立つ。

標本平均の期待値，分散，標準偏差

母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　分散 $V(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

例　母平均 60，母標準偏差 5 の母集団から，大きさ 9 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=\qquad$ ，　分散 $V(\overline{X})=\text{—}=\dfrac{25}{9}$，　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\qquad=\dfrac{5}{3}$

要点 ②　標本平均の分布と正規分布

一般に , 母集団がどのような分布であっても , 次のことが成り立つことが知られている。

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，

その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

例　母平均 60，母標準偏差 10 の母集団から，大きさ 100 の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 62 以上となる確率を求める。

標本平均 $\overline{X}$ の分布は近似的に $N\left(\quad,\quad\right)$，すなわち $N(60,\ 1^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{1}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(\overline{X}\geqq 62)=P(Z\geqq 2)=0.5-0.4772=0.0228$

※母集団分布が正規分布のときは，標本の大きさ n に関係なく，標本平均 $\overline{X}$ の分布も正規分布に従う。

※標本の大きさ n を限りなく大きくしていくと，標本平均 $\overline{X}$ の標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ は限りなく 0 に近づき, $\overline{X}$ の分布は母平均 m の近くに限りなく集中する。つまり, 標本平均 $\overline{X}$ は, 標本の大きさ n を大きくしていくと, 母平均 m に近づいていく。これを「大数の法則」という。

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

Point Pickup

標本平均の期待値，標準偏差

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の

期待値 $E(\overline{X})=m$　　　標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

標本平均の分布

母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，
その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

【MEMO】

§3 母平均の推定

要点整理 と 公式

要点 ① 母平均の推定

標本調査の目的は，抽出された標本の性質から，母集団の性質を推測することである。ここでは，母平均がわかっていない母集団から無作為抽出された標本の標本平均を用いて，母平均を推定する。

母平均 m，母分散 σ^2 である母集団から抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布　　　　　　に従う。よって，

$Z=\dfrac{\overline{X}-\quad}{\qquad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

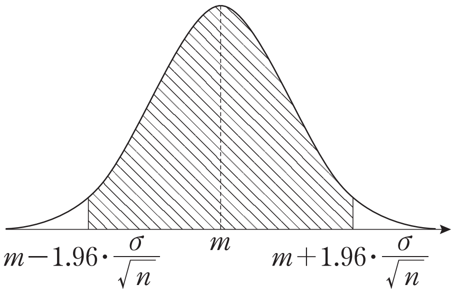
ここで，$P(-u \leqq Z \leqq u)=0.95$ となる u を求めると，正規分布表より $u=$　　である。よって

$$P\left(-1.96 \leqq \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqq 1.96\right)=0.95$$

と表される。この式のかっこの中を変形すると

$$P\left(m-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \overline{X} \leqq m+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

であり，さらにかっこの中を m の値の範囲として表すと



$$P\left(\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

となる。この式は，区間 $\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ に母平均 m の値を含む確率が約 95％であることを示している。この区間を，母平均 m に対する「　　　　」95％の「　　　　　」という。

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母平均 m に対して，信頼度 95% の信頼区間を求めることを，信頼度 95% で推定する，という。

例　ある試験を受けた生徒の中から，100 人を無作為抽出して調査したところ，その平均点は 59.8 点であった。母標準偏差を 13.0 点として，この試験を受けた生徒全体の平均点を，信頼度 95% で推定する。

標本平均は $\overline{X}=59.8$，母標準偏差は $\sigma=13.0$，標本の大きさは $n=100$ より，

信頼度 95% の信頼区間は

$$\qquad - \qquad\qquad \leqq m \leqq \qquad + \qquad$$

$$57.252 \leqq m \leqq 62.348$$

よって，母平均は信頼度 95% で 57.3 点以上 62.3 点以下 と推定される。

標本平均 $\overline{X}$ の値は，抽出される標本ごとに異なるため，実際の母平均の推定においては，標本を抽出して信頼区間を求めることを 1 度だけ行い，その結果を信頼区間として用いる。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の場合，標本を抽出して信頼区間を求めることを多数回くり返すと，その中に母平均 m を含む区間が 95%程度あることが期待される。

母標準偏差 σ がわからないときは，標本の大きさ n が大きければ，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよいことが知られている。

3 ある工場で製造しているある製品から784個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均314.15gであった。母標準偏差を24gとして，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度95%で推定せよ。

Point Pickup

母平均の推定

母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度95%の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

母標準偏差 σ がわからないときは，母標準偏差 σ のかわりに標本の標準偏差を用いてもよい。

[MEMO]

§4 仮説検定

要点整理 と 公式

要点 ① 仮説検定

「仮説検定」… ある仮説を立てて，それが成り立つかどうかを統計的に検証する手法

　仮説検定の主な流れは以下の通り。

Ⅰ　主張したい仮説 H_1 を立てる。

Ⅱ　H_1 に反する仮説 H_0 を立てる。

Ⅲ　H_0 が正しいかどうかを統計的に検証し

　(i) 正しくないと判断できる場合　→ H_1 が正しいといえる

　(ii) 正しくないとは判断できない場合 → H_1 が正しいとはいえない

仮説 H_0 を「　　　　」，仮説 H_1 を「　　　　」という。

Ⅲにおいて，帰無仮説 H_0 が正しくないと判断することを，帰無仮説を「　　　　」という。

　帰無仮説が棄却されるかどうかを判断するための基準となる確率を「　　　　」(または危険率) という。帰無仮説のもとで，標本抽出の結果，またはその結果以上に極端な結果が得られる確率を求め，その確率が有意水準以下の場合，それはほとんど起こりえないと判断し，帰無仮説を棄却し，対立仮説を採択することができる。

　求めた確率が有意水準より大きい場合は，帰無仮説を棄却できない。ただし，これにより帰無仮説が正しいと判断できるわけではない。

　有意水準は，0.05(5%)，または 0.01(1%) とすることが多い。

例　ある 1 枚の硬貨を 100 回投げて，表が 60 回出た。この結果から，この硬貨は表が出やすいと判断してよいかを，有意水準を 5% として検定する。

対立仮説 H_1 は「この硬貨は　　　　　　」

帰無仮説 H_0 は「この硬貨は　　　　　　　　　　」

H_0 が正しいとするとき，この硬貨を投げて表が出る回数を X とすると，X は二項分布　　　　に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = \qquad = 50, \qquad \sigma = \qquad = 5$$

$n = 100$ は十分に大きいから，X は正規分布　　　　に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X}{}$ とすると，Z は標準正規分布　　　　に従う。

$X=60$ のとき，$Z=$　であるから，硬貨を 100 回投げて，表が 60 回　　　出る確率は，正規分布表より

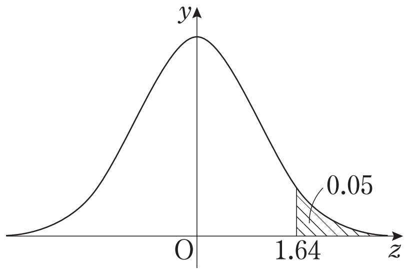
$$P(\qquad)=P(\qquad)$$
$$=0.5-P(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-0.4772=0.0228$$

つまり，約 2.3% であり，有意水準 5% に比べて　　　　。

よって，帰無仮説 H_0 は　　　　　。

したがって，この硬貨は表が出やすいと　　　　　　。

正規分布表より $P(Z\leqq 1.64)\fallingdotseq 0.95$ であるから，$P(Z\geqq 1.64)\fallingdotseq 0.05$ である。つまり，$Z\geqq 1.64$ となる事象は，確率 5% でしか起こらない。$Z=2$ はこの範囲に含まれているから，$X=60$ は帰無仮説 H_0 のもとでは起こる可能性が低いことが起こった，ということができるため，H_0 は棄却できる。

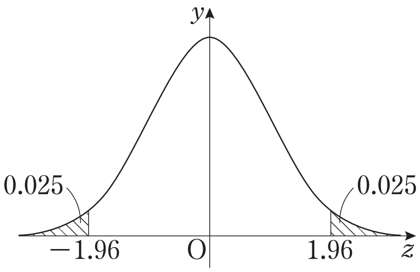


有意水準に対して，帰無仮説が棄却される確率変数の値の範囲を「棄却域」という。上の例においては，棄却域は $Z\geqq 1.64$ である。

「硬貨の表と裏の出方に差がある」ことを判断するために，表が出た回数が大きすぎる場合も小さすぎる場合も帰無仮説が棄却されるように，棄却域を両側にとる場合もある。有意水準 0.05 のときは

$$P(-1.96\leqq Z\leqq 1.96)\fallingdotseq 0.95$$

より，棄却域は $Z\leqq -1.96$，$1.96\leqq Z$ である。



4 3 人のアーティスト A，B，C は同じ程度の人気があると言われている。この 3 人のうち誰が好みかについて，無作為に選んだ 288 人に調査を行ったところ，A を選んだ人が 104 人で，B，C に比べて多かった。この結果から，A，B，C の 3 人から A を選ぶ人の割合は $\frac{1}{3}$ ではないと判断してよいか。有意水準を 5% として検定せよ。

Point Pickup

仮説検定

仮説検定の主な流れは以下

① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。

② H_0 のもとで，標本調査の結果またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。

③ ②の結果が

有意水準以下の場合 → H_0 を棄却できる。
よって，H_1 が正しいと判断できる。

有意水準より大きい場合 → H_0 を棄却できない。
よって，H_1 が正しいとは判断できない。

[MEMO]

第 31 講　確認テスト

1 10 点のカードが 20 枚，5 点のカードが 30 枚，1 点のカードが 50 枚ある。この 100 枚のカードを母集団とし，カードの点数を X とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 母集団分布を求めよ。

X	10	5	1	計
P	$\dfrac{\boxed{アイ}}{100}$	$\dfrac{\boxed{ウエ}}{100}$	$\dfrac{\boxed{オカ}}{100}$	1

(2) 母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

$m = \boxed{キ}$

$\sigma^2 = \boxed{クケ}$

$\sigma = \boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$

2 母平均 58，母標準偏差 10 の母集団から，標本を無作為抽出し，その標本平均を $\overline{X}$ とするとき，次の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852

(1) 大きさ 25 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

$E(\overline{X}) = \boxed{シス}$，$\sigma(\overline{X}) = \boxed{セ}$

(2) 大きさ 225 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 57.5 以上 58.5 以下となる確率は $\boxed{ソ}$ である。

$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを下の①～⑥のうちから選べ。

① 0.1915　② 0.2157　③ 0.2734
④ 0.3830　⑤ 0.4314　⑥ 0.5468

3 ある農場で生産した卵の中から 400 個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均は 53.4g であった。母標準偏差を 2.5g として，この農場で生産されている卵の重さの平均を信頼度 95%で推定すると，［タ］となる。

［タ］に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

① 48.5g 以上 58.3g 以下
② 53.1g 以上 53.7g 以下
③ 53.2g 以上 53.6g 以下
④ 53.3g 以上 53.5g 以下

4 ある飲料メーカーが新商品を開発した。無作為に選んだ 256 人に，この飲料を試飲してもらい，従来の商品とどちらを好むか調査を行ったところ，新商品を好む人は 142 人であった。この結果から，新商品を好む人が多いと判断してよいか，有意水準を 5%として検定せよ。

［チ］

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

［チ］に当てはまるものを下の①～④のうちから選べ。

① 新商品を好む人の方が多いと判断できる。
② 新商品を好む人の方が多いとは判断できない。
③ 新商品と従来の商品を好む人は同程度であると判断できる。
④ 従来の商品を好む人の方が多いと判断できる。

第 27 講　確率分布

§1　確率変数と確率分布

1　赤球 4 個，白球 3 個の入った袋から，2 個の球を同時に取り出すとき，出る赤球の個数を X とする。

(1)　X の確率分布を求めよ。

(2)　$P(X \leqq 1)$ を求めよ。

[解答]

(1)　確率変数 X のとりうる値は 0，1，2

$$P(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

(2)　$P(X \leqq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}=\frac{5}{7}$

§2 確率変数の期待値

2 3 枚の硬貨を同時に投げて，表が出る枚数を X とするとき，確率変数 X の期待値を求めよ。

[解答]

X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{8}(0\cdot1+1\cdot3+2\cdot3+3\cdot1)=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

§3 確率変数の分散と標準偏差

3 当たりくじ 2 本を含む 10 本のくじがある。このくじを同時に 5 本引いたときの当たりくじの本数を X とするとき，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

[解答]

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2

$$P(X=0)=\frac{{}_8\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{56}{252}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{140}{252}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{56}{252}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{56}{252}$	$\frac{140}{252}$	$\frac{56}{252}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{56}{252}+1\cdot\frac{140}{252}+2\cdot\frac{56}{252}=1$$

X の分散は

$$V(X)=(0-1)^2\cdot\frac{56}{252}+(1-1)^2\cdot\frac{140}{252}+(2-1)^2\cdot\frac{56}{252}=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

（分散の別解）

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=0^2\cdot\frac{56}{252}+1^2\cdot\frac{140}{252}+2^2\cdot\frac{56}{252}-1^2=\frac{364}{252}-1=\frac{112}{252}=\frac{4}{9}$$

§4 確率変数の変換

4 確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，確率変数 $6X-5$ の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

[解答]

$$E(X)=1\cdot\frac{6}{12}+2\cdot\frac{3}{12}+3\cdot\frac{2}{12}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$$

$$V(X)=1^2\cdot\frac{6}{12}+2^2\cdot\frac{3}{12}+3^2\cdot\frac{2}{12}+4^2\cdot\frac{1}{12}-\left(\frac{11}{6}\right)^2=\frac{52}{12}-\frac{121}{36}=\frac{35}{36}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{36}}=\frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって　$E(6X-5)=6E(X)-5=6\cdot\frac{11}{6}-5=6$

$$V(6X-5)=6^2\,V(X)=6^2\cdot\frac{35}{36}=35$$

$$\sigma(6X-5)=|6|\sigma(X)=6\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=\sqrt{35}$$

※$\sigma(6X-5)=\sqrt{V(6X-5)}=\sqrt{35}$

第 28 講　確率変数の和と積

§1 確率変数の和の期待値

1 100 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨 1 枚を同時に投げる。

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値を求めよ。

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。

[解答]

表が出た 100 円硬貨，10 円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(1) 表が出た硬貨の枚数の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

(2) 表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(100X+10Y)=100E(X)+10E(Y)=100\cdot\frac{1}{2}+10\cdot\frac{1}{2}=55\text{(円)}$$

§2 独立な確率変数

2 2 つの確率変数 X, Y が互いに独立で , それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき, 次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

[解答]

(1) $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1$

X, Y は独立より

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

(2) $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{2}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

X, Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

第 29 講　二項分布

§1 二項分布

1　1 枚の硬貨を 4 回投げるとき，表が出る回数を X とする。

(1)　X はどのような二項分布に従うか。$B(n,\ p)$ の形で答えよ。

(2)　X の確率分布を求めよ。

[解答]

(1)　1 回の試行で表が出る確率は $\dfrac{1}{2}$

この試行を 4 回繰り返すから，X は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従う。

(2)　$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{4-r}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

であり

$$P(X=0)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16},\qquad P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{16},$$

$$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16},\qquad P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16},$$

$$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{16}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

§2 二項分布の期待値，分散，標準偏差

2 1個のさいころを300回投げるとき，6の目が出る回数を X とする。

(1) X の期待値を求めよ。

(2) X の分散を求めよ。

(3) X の標準偏差を求めよ。

[解答]

X は二項分布 $B\left(300,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。

(1) $E(X)=300\cdot\frac{1}{6}=50$

(2) $V(X)=300\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{125}{3}$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\frac{125}{3}}=\frac{5\sqrt{15}}{3}$

第 30 講　正規分布

§1　連続分布

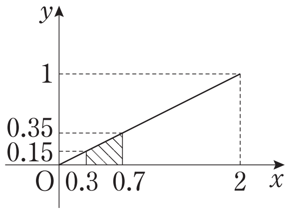
1　確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=\frac{1}{2}x\,(0\leqq x\leqq 2)$ で与えられているとき，次の確率を求めよ。

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)$　　(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)$

[解答]

(1)　$P(0.3\leqq X\leqq 0.7)=\frac{1}{2}\cdot(0.15+0.35)\cdot 0.4=0.1$

(2)　$P(0\leqq X\leqq 2)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$



§2 正規分布

2 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，以下の＜正規分布表＞を用いて，次の確率を求めよ。

(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53)$　　(2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1)$

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

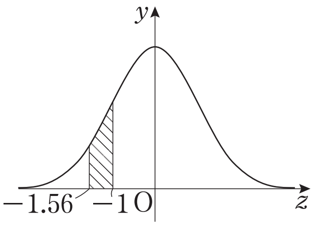
(1) $P(0 \leqq Z \leqq 0.53) = 0.2019$

(2) $P(-1.56 \leqq Z \leqq -1) = P(1 \leqq Z \leqq 1.56)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1.56) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.4406 - 0.3413$

$= 0.0993$



§3 確率変数の標準化

3 ある高校の 2 年生女子の身長が，平均 157.9 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

(1) この 2 年生女子の中で，身長 155 cm 以上 163 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2) この 2 年生女子の中で，身長が平均を 10 cm 以上上回る生徒は約何 % いるか。

＜ 正規分布表 ＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

身長を Xcm とすると，X は正規分布 $N(157.9,\ 5^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-157.9}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(1) $X=155$ のとき　$Z=-0.58$　　　$X=163$ のとき　$Z=1.02$

よって　$P(155 \leqq X \leqq 163)$

$=P(-0.58 \leqq Z \leqq 1.02)$

$=P(-0.58 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1.02)$

$=P(0 \leqq Z \leqq 0.58)+P(0 \leqq Z \leqq 1.02)$

$=0.2190+0.3461=0.5651$

したがって，約 57% いる。

(2) $X=167.9$ のとき　$Z=2$

よって　$P(X \geqq 167.9)$

$=P(Z \geqq 2)$

$= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

したがって，約 2% いる。

§4 二項分布の正規分布による近似

4 1枚の硬貨を1600回投げるとき，表の出る回数が789回以上である確率を求めよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

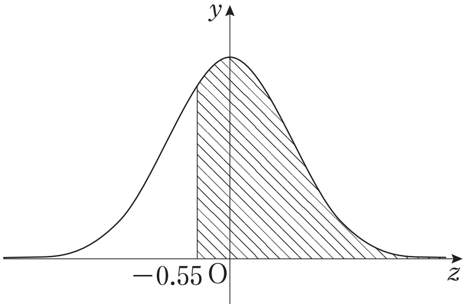
表が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(1600,\ \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X)=1600\cdot\frac{1}{2}=800,\quad V(X)=1600\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=400,\quad \sigma(X)=\sqrt{400}=20$$

$n=1600$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(800,\ 20^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-800}{20}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}P(X\geqq 789)&=P(Z\geqq -0.55)\\&=P(-0.55\leqq Z\leqq 0)+P(Z\geqq 0)\\&=P(0\leqq Z\leqq 0.55)+P(Z\geqq 0)\\&=0.2088+0.5\\&=0.7088\end{aligned}$$



[MEMO]

第 31 講　統計的な推測

§1　母集団と標本

1　1, 2, 3, 4 と書かれた球がそれぞれ 1 個, 2 個, 3 個, 4 個ある。この 10 個の球を母集団とし，球の数字を変量とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　母集団分布を求めよ。

(2)　母平均 m，母分散 σ^2，母標準偏差 σ を求めよ。

[解答]

母集団から 1 つの球を抽出し，その球に書かれた数字を X とする。

(1)　母集団分布は右の表

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

(2)　$m=1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{2}{10}+3\cdot\frac{3}{10}+4\cdot\frac{4}{10}=\frac{30}{10}=3$

$$\sigma^2=\left(1^2\cdot\frac{1}{10}+2^2\cdot\frac{2}{10}+3^2\cdot\frac{3}{10}+4^2\cdot\frac{4}{10}\right)-3^2$$

$$=\frac{100}{10}-9=1$$

$$\sigma=\sqrt{1}=1$$

§2 標本平均の分布

2 母平均 170, 母標準偏差 5 の母集団から，標本を無作為抽出し , その標本平均を $\overline{X}$ とする。

(1) 大きさ 16 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ の期待値，標準偏差を求めよ。

(2) 大きさ 100 の標本を抽出するとき，$\overline{X}$ が 169 以上 171 以下となる確率を求めよ。

[解答]

(1) $\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=170$，標準偏差は $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}$

(2) $\overline{X}$ の分布は近似的に $N\left(170,\ \dfrac{5^2}{100}\right)$，すなわち $N\left(170,\ \dfrac{1}{4}\right)$ に従う。

$\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-170}{\frac{1}{2}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，$P(169\leqq\overline{X}\leqq171)=P(-2\leqq Z\leqq2)=2P(0\leqq Z\leqq2)=2\cdot0.4772=0.9544$

§3 母平均の推定

3 ある工場で製造しているある製品から 784 個を無作為に抽出し，その重さを調べたところ，平均 314.15 g であった。母標準偏差を 24 g として，この工場で製造しているこの製品の重さの平均を信頼度 95% で推定せよ。

[解答]

標本平均は $\overline{X}=314.15$，母標準偏差は $\sigma=24$，標本の大きさは $n=784$ より，

信頼度 95% の信頼区間は

$$314.15-1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}}\leqq m\leqq 314.15+1.96\cdot\frac{24}{\sqrt{784}}$$

$$314.15-1.96\cdot\frac{6}{7}\leqq m\leqq 314.15+1.96\cdot\frac{6}{7}$$

$$312.47\leqq m\leqq 315.83$$

よって，母平均は信頼度 95% で 312.47 g 以上 315.83 g 以下 と推定される。

§4 仮説検定

4 3 人のアーティスト A，B，C は同じ程度の人気があると言われている。この 3 人のうち誰が好みかについて，無作為に選んだ 288 人に調査を行ったところ，A を選んだ人が 104 人で，B，C に比べて多かった。この結果から，A，B，C の 3 人から A を選ぶ人の割合は $\dfrac{1}{3}$ ではないと判断してよいか。有意水準を 5% として検定せよ。

[解答]

対立仮説 H_1 は「A を選ぶ人の割合は $\dfrac{1}{3}$ ではない」である。

帰無仮説 H_0 は「A を選ぶ人の割合は $\dfrac{1}{3}$」である。

H_0 が正しいとするとき，A を選ぶ人数を X とすると，X は二項分布 $B\left(288,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=288\cdot\frac{1}{3}=96,\qquad \sigma=\sqrt{288\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=8$$

$n=288$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(96,\ 8^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-96}{8}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=104$ のとき，$Z=1$ であるから，288 人中 104 人以上が A を選ぶ確率は，
正規分布表より

$$P(X\geqq 104)=P(Z\geqq 1)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)=0.5-0.3413=0.1587$$

つまり，約 15.9% であり，有意水準 5% に比べて大きい。

よって，帰無仮説 H_0 は棄却できない。

したがって，A を選ぶ人の割合は $\dfrac{1}{3}$ ではないとは判断できない。

第27講　確認テスト 解答

1

(1)　**[正解]** アイ：10，ウエ：30，オカ：15

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2，3 [A]

$$P(X=0)=\frac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\frac{10}{56}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\frac{30}{56}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_5C_1}{{}_8C_3}=\frac{15}{56}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\mathbf{\frac{10}{56}}$	$\mathbf{\frac{30}{56}}$	$\mathbf{\frac{15}{56}}$	$\frac{1}{56}$	1

[A]　確率変数 X のとりうる値 x_1，x_2，……，x_n と，それぞれの値をとる確率 p_1，p_2，……，p_n の対応関係を，X の確率分布という。

X	x_1	x_2	…	x_n	計
P	p_1	p_2	…	p_n	1

$p_1\geqq 0$，$p_2\geqq 0$，……，$p_n\geqq 0$

$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$

(2)　**[正解]** キ：2，ク：7

[解説]

X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

よって

$$P(X\geqq 2)=P(X=2)+P(X=3)$$ [B]

$$=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{16}{56}=\mathbf{\frac{2}{7}}$$

[B]　確率変数 X について
$X=a$ となる確率を $P(X=a)$
$a\leqq X\leqq b$ となる確率を $P(a\leqq X\leqq b)$
のように表す。

2 [正解] ケ：2，コ：3

[解説]

X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

よって，X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{4}{9}+1\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{1}{9}$$ [C]

$$=\frac{1}{9}(0\cdot4+1\cdot4+2\cdot1)$$

$$=\frac{6}{9}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

[C]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

3 [正解] サ：①，シ：⑤，ス：⑦

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 1，2，3

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{12}{20}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

よって，X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	計
P	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{4}{20}$	1

X の期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{20}+2\cdot\frac{12}{20}+3\cdot\frac{4}{20}=\mathbf{2}$$ [D]

X の分散は

$$V(X)$$

$$=(1-2)^2\cdot\frac{4}{20}+(2-2)^2\cdot\frac{12}{20}+(3-2)^2\cdot\frac{4}{20}$$ [E]

$$=\frac{8}{20}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\mathbf{\frac{\sqrt{10}}{5}}$$ [E]

（別解）　分散について

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$ [E]

$$=1^2\cdot\frac{4}{20}+2^2\cdot\frac{12}{20}+3^2\cdot\frac{4}{20}-2^2$$

$$=\frac{88}{20}-4=\frac{8}{20}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

[D]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

[E]　確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，X の期待値を $E(X)=m$ とすると，分散は

$$V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

または $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差は $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

4 [正解] セ：①，ソ：③，タ：④

[解説]

X の期待値，分散，標準偏差は

$$E(X)=0\cdot\frac{2}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{2}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$V(X)=0^2\cdot\frac{2}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{2}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{4}\right)^2$$

[F]

$$=\frac{20}{8}-\frac{25}{16}=\frac{15}{16}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって

$$E(4X-3)=4E(X)-3$$

[G]

$$=4\cdot\frac{5}{4}-3=\mathbf{2}$$

$$V(4X-3)=4^2\,V(X)=4^2\cdot\frac{15}{16}=\mathbf{15}$$

$$\sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{\mathbf{15}}$$

※$\sigma(4X-3)=\sqrt{V(4X-3)}=\sqrt{\mathbf{15}}$

[F]　確率変数 X の分散は
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

[G]　確率変数 X と定数 a，b について

期待値	$E(aX+b)=aE(X)+b$
分散	$V(aX+b)=a^2\,V(X)$
標準偏差	$\sigma(aX+b)=\lvert a\rvert\sigma(X)$

第28講　確認テスト 解答

1 **[正解]** ア：6

[解説]

1 回目と 2 回目に引いたカードに書かれた数をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の期待値である。

X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}$$

$$=3$$

同様に

$$E(Y)=3$$

したがって，カードに書かれた数の和 $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3+3=6$$ [A]

[A]　2 つの確率変数 X，Y について
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

2 **[正解]** イウエ：300

[解説]

表が出た 500 円硬貨，100 円硬貨の枚数をそれぞれ X 枚，Y 枚とすると，確率変数 X，Y の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y	0	1	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，表が出た硬貨の金額の和の期待値は

$$E(500X+100Y)$$ [B]

$$=500E(X)+100E(Y)$$

$$=500\cdot\frac{1}{2}+100\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\mathbf{300}\text{（円）}$$

[B]　2 つの確率変数 X，Y と定数 a，b について
$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

3

(1)　**[正解]** オ：3

[解説]

X，Y の期待値はそれぞれ

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{5}{9}+3\cdot\frac{2}{9}=2$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

X，Y は独立より

$$E(XY)=E(X)E(Y)=2\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{3}$$ [C]

[C]　確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$E(XY)=E(X)E(Y)$

(2)　**[正解]** カキ：49

[解説]

$$E(X)=2$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{5}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{40}{9}$$

より，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{40}{9}-2^2=\dfrac{4}{9}$

$$E(Y)=\frac{3}{2}$$

$$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{2}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$

より，$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\dfrac{19}{6}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{11}{12}$

X，Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{4}{9}+\frac{11}{12}=\mathbf{\frac{49}{36}}$$ [D]

[D]　確率変数 X，Y が互いに独立であるとき
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

第 29 講　確認テスト 解答

1

(1)　**[正解]** ア：③

[解説]

1 回の試行で 1 が書かれた球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$

この試行を 3 回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ に従う。 [A]

[A]　1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返す反復試行において，A の起こる回数を X とすると，X は確率変数で，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

(2)　**[正解]** イウ：27，エオ：27，カ：9，キ：1

[解説]

X は二項分布 $B\left(3,\ \frac{1}{4}\right)$ に従う。

$X=r$ となる確率は

$$P(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-r}$$ [B]

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X について，$X=r$ となる確率は，反復試行の確率の式より

$$P(X=r)={}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

であり

$$P(X=0)={}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{64}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

$$P(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{64}$$

であるから，X の確率分布は下の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

2

(1)　**[正解] ク：③**

[解説]

さいころを 1 回投げて偶数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

この試行を 400 回繰り返すから，X は二項分布

$B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって

$$E(X)=400\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{200}$$ [C]

> [C]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき
> 　期待値　$E(X)=np$

(2)　**[正解] ケ：⑥，コ：②**

[解説]

X は二項分布 $B\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

よって

$$V(X)=400\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{100}$$ [D]

$$\sigma(X)=\sqrt{100}=\mathbf{10}$$

> [D]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
> 　分散　　$V(X)=npq$
> 　標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

第 30 講　確認テスト 解答

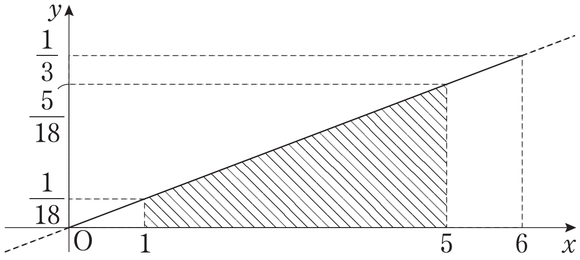
1

(1)　**[正解]** ア：2，イ：3

[解説]

$$P(1 \leqq X \leqq 5) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{18}+\frac{5}{18}\right)\cdot 4 \quad \text{[A]}$$

$$= \frac{12}{18} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$



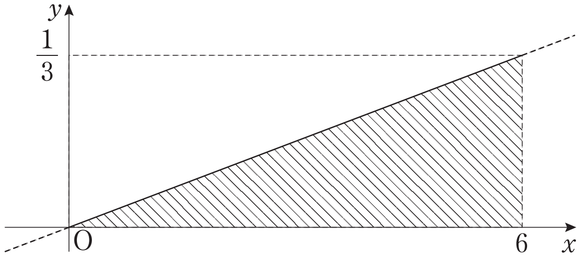
[A]　連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすると，$P(a \leqq X \leqq b)$ は曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積を表す。

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)dx$$

(2)　**[正解]** ウ：1

[解説]

$$P(0 \leqq X \leqq 6) = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{1} \quad \text{[B]}$$



[B]　X のとりうる値の範囲が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ のとき

$$P(\alpha \leqq X \leqq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$$

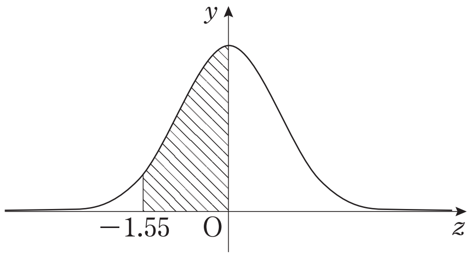
2

(1)　**[正解]** エオカキ：4394

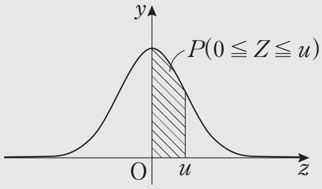
[解説]

$P(-1.55 \leqq Z \leqq 0)=P(0 \leqq Z \leqq 1.55)$ [C]

$= \mathbf{0.4394}$



[C]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(0 \leqq Z \leqq u)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。
分布曲線が $z=0$（y 軸）に関して対称であることに注目。



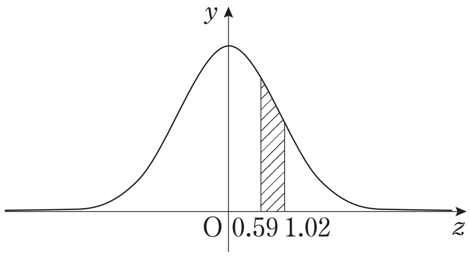
(2)　**[正解]** クケコサ：1237

[解説]

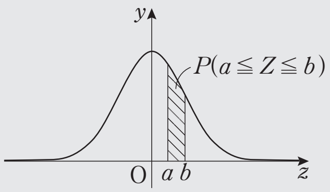
$P(0.59 \leqq Z \leqq 1.02)$

$=P(0 \leqq Z \leqq 1.02)-P(0 \leqq Z \leqq 0.59)$ [D]

$=0.3461-0.2224=\mathbf{0.1237}$



[D]　確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，確率 $P(a \leqq Z \leqq b)$ は，グラフの斜線部分の面積に等しく，その値は正規分布表を用いて求めることができる。



3

(1)　**[正解]** シス：53

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N\left(26,\ 4^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [E]

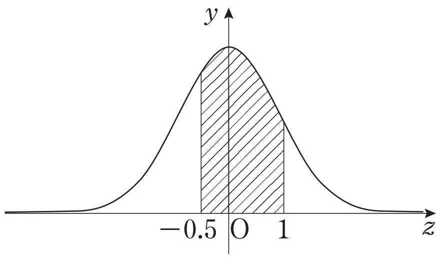
$X=24$ のとき $Z=-0.5$

$X=30$ のとき $Z=1$

よって

$$
\begin{aligned}
&P(24 \leqq X \leqq 30)\\
&=P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)\\
&=P(-0.5 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\
&=P(0 \leqq Z \leqq 0.5)+P(0 \leqq Z \leqq 1)\\
&=0.1915+0.3413=0.5328
\end{aligned}
$$

したがって，**約 53%** いる。



[E]　確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(2)　**[正解]** セ：7

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N\left(26,\ 4^2\right)$ に従う。

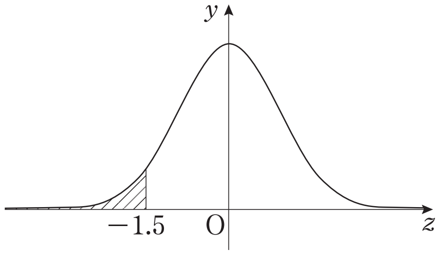
$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [F]

$X=20$ のとき $Z=-1.5$

よって

$$\begin{aligned} P(X\leqq 20) &= P(Z\leqq -1.5) \\ &= P(Z\geqq 1.5) \\ &= 0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.5) \\ &= 0.5-0.4332=0.0668 \end{aligned}$$

したがって，**約 7%** いる。



[F]　確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

4 **[正解]** ソタチツ：9772

[解説]

1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布

$B\left(500,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=500\cdot\frac{1}{6}=\frac{250}{3}$$ [G]

$$V(X)=500\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{625}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}$$

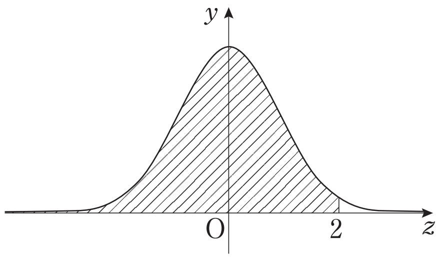
$n=500$ は十分に大きいから，X は正規分布

$N\left(\dfrac{250}{3},\ \left(\dfrac{25}{3}\right)^2\right)$ に従うとみなしてよい。 [H]

ここで，$Z=\dfrac{X-\dfrac{250}{3}}{\dfrac{25}{3}}=\dfrac{3X-250}{25}$ とすると，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$\begin{aligned}&P(X\leqq 100)\\&=P(Z\leqq 2)\\&=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=P(Z\geqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=0.5+0.4772=\mathbf{0.9772}\end{aligned}$$



[G]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
$E(X)=np$，　$V(X)=npq$，
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[H]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$

第 31 講　確認テスト 解答

1

(1)　**[正解]** **アイ**：20，**ウエ**：30，**オカ**：50

[解説]

母集団分布は下の表のようになる。 [A]

X	10	5	1	計
P	$\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{100}}$	$\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{100}}$	$\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{100}}$	1

[A]　母集団から 1 個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき，X の確率分布を「母集団分布」という。

(2)　**[正解]** **キ**：4，**クケ**：12，**コ**：2，**サ**：3

[解説]

母集団分布は下の表のようになる。

X	10	5	1	計
P	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{50}{100}$	1

母平均は

$$m=10\cdot\frac{20}{100}+5\cdot\frac{30}{100}+1\cdot\frac{50}{100}$$ [B]

$$=\frac{400}{100}=\mathbf{4}$$

母分散は

$$\sigma^2=\left(10^2\cdot\frac{20}{100}+5^2\cdot\frac{30}{100}+1^2\cdot\frac{50}{100}\right)-4^2$$

$$=\frac{2800}{100}-16=\mathbf{12}$$

母標準偏差は

$$\sigma=\sqrt{12}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

[B]　母集団から 1 個の個体を無作為に抽出したときの変量 x の値を X とするとき，
母平均 $m=E(X)$
母分散 $\sigma^2=V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
母標準偏差 $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{V(X)}$

2

(1)　**[正解]** シス：58，セ：2

[解説]

$\overline{X}$ の期待値は $E(\overline{X})=\mathbf{58}$　[C]

$$標準偏差は\ \sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=\mathbf{2}$$

[C]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の
期待値 $E(\overline{X})=m$
標準偏差 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(2)　**[正解]** ソ：⑥

[解説]

$\overline{X}$ の分布は近似的に正規分布 $N\left(58,\ \dfrac{10^2}{225}\right)$，

すなわち $N\left(58,\ \dfrac{4}{9}\right)$ に従う。　[D]

[D]　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，その標本平均 $\overline{X}$ の分布は，n が十分大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

$\dfrac{4}{9}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ より，$Z=\dfrac{\overline{X}-58}{\frac{2}{3}}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$\begin{aligned}P(57.5\leqq\overline{X}\leqq58.5)&=P(-0.75\leqq Z\leqq0.75)\\&=2P(0\leqq Z\leqq0.75)\\&=2\cdot0.2734=\mathbf{0.5468}\end{aligned}$$

3

[正解] タ：③

[解説]

標本平均は $\overline{X}=53.4$，母標準偏差は $\sigma=2.5$，標本の大きさは $n=400$ より，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$53.4-1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}\leqq m\leqq53.4+1.96\cdot\frac{2.5}{\sqrt{400}}$$　[E]

$$53.4-1.96\cdot\frac{1}{8}\leqq m\leqq53.4+1.96\cdot\frac{1}{8}$$

$$53.155\leqq m\leqq53.645$$

よって，母平均は信頼度 95% で **53.2g 以上 53.6g 以下**と推定される。

[E]　母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の標本を無作為抽出するとき，n が十分大きいならば，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は
$\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

4 **[正解]** チ：①

[解説]

対立仮説 H_1 は「新商品を好む人は従来の商品を好む人よりも多い」である。

帰無仮説 H_0 は「新商品と従来の商品を好む人の人数は変わらない」である。

H_0 が正しいとするとき，新商品を選ぶ人数を X とすると，X は二項分布 $B\left(256,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=256\cdot\frac{1}{2}=128$$

$$\sigma=\sqrt{256\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=8$$

$n=256$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N\left(128,\ 8^2\right)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-128}{8}$ とすると，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=142$ のとき，$Z=1.75$ であるから，256 人中 142 人以上が新商品を選ぶ確率は，正規分布表より

$$\begin{aligned}P(X\geqq 142)&=P(Z\geqq 1.75)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.75)\\&=0.5-0.4599=0.0401\end{aligned}$$

つまり，約 4%であり，有意水準 5%に比べて小さい。 [F]

よって，帰無仮説 H_0 を棄却できる。

したがって，**新商品を好む人の方が多いと判断できる**。

［F］ 帰無仮説のもとで，標本調査の結果，またはそれ以上に極端な結果が得られる確率を求める。その確率が
- 有意水準以下の場合
  ⇒ H_0 を棄却できる
  （H_1 が正しいと判断できる）
- 有意水準より大きい場合
  ⇒ H_0 を棄却できない
  （H_1 が正しいとは判断できない）

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。